

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ ФЛАТТЕРА

М.А.НАДЖАФОВ

*Азербайджанский Государственный Педагогический Университет  
bnajafov@rambler.ru; bnajafov@physics.ab.az*

*В рассматриваемой работе исходная система линеаризуется по малым возмущениям. Решение возмущенной системы ищется в форме гармонических колебаний. В результате задача панельного флаттера сводится к проблеме собственных значений для системы из двух несамосопряженных операторов.*

Представим себе коническую поверхность, которая в сферической системе координат  $(r, \theta, \varphi)$  занимает область

$$V : \{0 \leq r \leq \infty; \theta = \alpha; 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}.$$

Часть поверхности  $r_1 \leq r \leq r_2$  образована упругой оболочкой, остальная часть жесткая. Конус симметрично обтекается сверхзвуковым потоком газа; считаются выполненными условия:  $M^2 = (v/a_0)^2 \gg 1$ ,  $a^2 \ll 1$ , поэтому мы пользуемся результатом ранее опубликованной работы [1]. Координаты  $r$  и ранее введенная  $x$  связаны соотношением:  $x = r \cos \alpha$ ; при условии  $a^2 \ll 1$  эти координаты можно отождествить:  $x \cong r$ , что и будет сделано в дальнейшем.

Напряженно-деформированное состояние конической оболочки описывается уравнениями технической теории в смешанной форме [2]

$$D\Delta^2 w - \frac{ctg\alpha}{x} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - L(w, F) = \Delta p - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (1)$$

$$\Delta^2 F + Eh \frac{ctg\alpha}{x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{2} L(w, w) = 0, \quad (2)$$

здесь  $F$  – функция усилий в срединной поверхности,  $D = Eh / \left(12(1-\nu^2)\right)^3$  – цилиндрическая жесткость,  $\Delta$  – оператор Лапласа в сферических координатах.

Оператор  $L(u, v)$  имеет вид

$$L(u, \nu) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \left( \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 \nu}{\partial \psi^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial \nu}{\partial x} \right) +$$

$$+ \frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} \left( \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial x} \right) -$$

$$- 2 \left( \frac{1}{x} \frac{\partial^2 \nu}{\partial x \partial \psi} - \frac{1}{x^2} \frac{\partial \nu}{\partial \psi} \right) \left( \frac{1}{x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \psi} - \frac{1}{x^2} \frac{\partial u}{\partial \psi} \right).$$

Введено дополнительное обозначение  $\psi = \varphi \sin \alpha$ .

В соответствии с изложенным выше, решение системы (1), (2) представим в виде суммы основного (квазистатического) и возмущенного (динамического) состояний:

$$w = w_0(\psi) + w_1(x, \psi, t),$$

$$F = F_0(x, \psi) + F_1(x, \psi, t).$$

Подставим эти разложения в (1), (2), линеаризуем по малым возмущениям и упростим [3]; получим в результате:

Основное (квазистатическое состояние)

$$D\Delta^2 w_0 - \frac{ctg\alpha}{x} \frac{\partial^2 F_0}{\partial x^2} = \Delta p_0, \quad (3)$$

$$\Delta^2 F_0 + \frac{Eh}{xtg\alpha} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = 0. \quad (4)$$

В этой системе квазистатическое давление  $\Delta p_0$  дается выражением из [4]  
Возмущенное (динамическое) состояние

$$D\Delta^2 w_1 - \frac{ctg\alpha}{x} \frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} - L(w_1, F_0) = \Delta p_1 - \rho h \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2}, \quad (5)$$

$$\Delta^2 F_1 + Eh \frac{ctg\alpha}{x} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} = 0, \quad (6)$$

в котором динамическая часть давления  $\Delta p_1$  определяется выражением из [4].

Проведем некоторые преобразования. Вместо координаты  $x$  введем новую координату  $y_1$  соотношением

$$x = x_1 + y_1, \quad 0 \leq y_1 \leq l, \quad l = x_2 - x_1.$$

Введем безразмерные координаты

$$x/l = x_1/l + y_1/l \equiv x_0 + y, \quad 0 \leq y \leq 1,$$

и безразмерные функции

$$W_0 = w_0/h, \quad \Phi_0 = F_0/(Eh^2l).$$

Тогда система (3), (4) основного состояния запишется в виде:

$$\Delta^2 W_0 - \frac{A_0}{x_0 + y} \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial y^2} = \frac{12(1-\nu^2)l^4}{Eh^4} \Delta p_0 \equiv \Delta p_0^*, \quad (7)$$

$$\Delta^2 \Phi_0 + \frac{1}{(x_0 + y)tg\alpha} \frac{\partial^2 W_0}{\partial y^2} = 0; \quad (8)$$

здесь введено обозначение  $A_0 = 12(1-\nu^2)l^2 / (h^2 tg\alpha)$ .

Для системы (7), (8) примем условия шарнирного опирания, с хорошей точностью они могут быть записаны в форме Навье:

$$y = 0, \quad y = 1: \quad W_0 = 0; \quad W_0'' + \frac{\nu}{x_0 + y} W_0' = 0; \quad (9)$$

$$\Phi_0 = 0; \quad \Phi_0'' = 0.$$

Штрихи означают производные по  $y$ , а

$$\Delta^2 f = f^{IV} + \frac{2}{x_0 + y} f^{III} - \frac{2}{(x_0 + y)^2} f^{II} + \frac{1}{(x_0 + y)^3} f^I. \quad (10)$$

Сделаем замечание относительно второго граничного условия в (9). Обычно принимаемое решение для  $W_0$  в форме  $k_0 \sin \pi y$  не удовлетворяет этому условию точно, но, поскольку  $x_0 \sim 1$  и  $y_0 \sim 1$ , второе слагаемое оказывается величиной порядка  $\nu/\pi$  в сравнении с первым; с достаточной точностью, поэтому можно принять:

$$y = 0, \quad y = 1: \quad W_0 = 0; \quad W_0'' = 0. \quad (11)$$

Положим для основного состояния

$$W_0 = K_0 \sin \pi y, \quad \Phi_0 = N_0 \sin \pi y.$$

Подставим это в (7) и проведем обычную проекционную процедуру: получим в результате

$$K_0 \left( \pi^2 - 2\pi l_1 + 2l_2 + \frac{1}{\pi} l_3 \right) + 2A_0 N_0 l_5 = \frac{4}{\pi^3} \Delta p^*, \quad (12)$$

$$K_0 = N_0 tg\alpha \left( \pi^2 - 2\pi l_1 + 2l_2 + \frac{1}{\pi} l_3 \right); \quad (13)$$

здесь введены следующие обозначения для интегралов

$$l_1 = \int_0^1 \frac{\sin 2\pi y}{x_0 + y} dy; \quad l_2 = \int_0^1 \frac{\sin^2 \pi y}{(x_0 + y)^2} dy;$$

$$l_3 = \int_0^1 \frac{\sin 2\pi y}{(x_0 + y)^3} dy; \quad l_5 = \int_0^1 \frac{\sin^2 \pi y}{x_0 + y} dy.$$

Обозначим

$$\pi^2 - 2\pi l_1 + 2l_2 + \frac{1}{\pi} l_3 = l_0.$$

Тогда  $K_0 = I_0 N_0 \operatorname{tg} \alpha$ ; подставив это в (12), определим параметр  $N_0$ :

$$N_0 = \frac{4}{\pi^3 (I_0^2 \operatorname{tg} \alpha + 2A_0 I_5)} \Delta p_0^* \quad (14)$$

Для дальнейшего полезно провести некоторые оценки. Расчеты показывают, что

$$I_1 \sim 0,1; I_2 \sim 0,2; I_3 \sim 0,1; I_5 \sim 0,4.$$

Поэтому с хорошей точностью  $I_0 \cong \pi^2$ . Примем  $\alpha = \pi/18 \cong 10^{-1}$ , тогда  $I_0^2 \operatorname{tg} \alpha \sim 10^3$ .

Параметр  $A_0 = 12(1-\nu^2)l^2 / (h^2 \operatorname{tg} \alpha)$  имеет оценку:  $A_0 \sim 10^2 l^2 / h^2$ , поэтому будет

$$A_0 \sim 10^2 l^2 / h^2.$$

Очевидно, что  $2A_0 I_2 \sim I_0^2 \operatorname{tg} \alpha$  и с хорошей точностью можно принять на основании обозначения (7),

$$N_0 = \frac{2l^2}{\pi^3 I_5 h^2} \Delta p_0.$$

Внесем сюда (7) и обозначим

$$H_0(u) = 1 + \frac{\varepsilon a^*(u)}{4} - \frac{\gamma}{2u^2}. \quad (15)$$

В результате для  $N_0$  получим выражение:

$$N_0 = \frac{4\gamma p_0 l^2 u^2 \operatorname{tg} \alpha}{(\gamma+1)\pi^3 I_5 h^2 E} H_0(u). \quad (16)$$

Обратимся к системе (5), (6) возмущенного состояния; введем, как и выше, безразмерную координату, безразмерный прогиб  $W_1 = w_1/h$  и безразмерную функцию усилий  $\Phi_1 = F_1 / (Eh^2 l)$ . Уравнения (5), (6) примут после этого вид:

$$\begin{aligned} \Delta^2 W_1 - \frac{A_0}{x_0 + y} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2} + \left( A_2 \operatorname{Mu} H_2(x_0 + y) - \frac{B_0}{x_0 + y} \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} \right) \frac{\partial^2 W_1}{\partial y^2} + \\ + \left( A_1 \operatorname{Mu} H_1 - \frac{B_0}{x_0 + y} \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial y^2} \right) \frac{\partial W_1}{\partial y} + A_1 \operatorname{Mu} H_1 \frac{\partial W_1}{\partial t} + \end{aligned} \quad (17)$$

$$+ 2A_2 \operatorname{Mu} H_2(x_0 + y) \frac{\partial^2 W_1}{\partial t \partial y} + B_1 \frac{\partial^2 W_1}{\partial t^2} = 0,$$

$$\Delta^2 \Phi_1 + \frac{1}{(x_0 + y) \operatorname{tg} \alpha} \frac{\partial^2 W_1}{\partial y^2} = 0. \quad (18)$$

Здесь введены обозначения:

$$H_1 = H_1(u) = 1 + \frac{3\varepsilon}{4} - \varepsilon \frac{11a^*(u)}{8\gamma}; \quad H_2 = H_2(u) = 1 - \varepsilon \frac{3a^*(u)}{2\gamma(\gamma+1)},$$

$$A_1 = \frac{48\gamma(1-\nu^2)p^0l^3}{(\gamma+1)Eh^3}, \quad A_2 = \frac{6\gamma(1-\nu^2)p^0l^3}{Eh^3},$$

$$B_0 = \frac{12(1-\nu^2)l}{h}, \quad B_1 = \frac{12(1-\nu^2)a_0^2l^2}{c_0^2h^2}, \quad c_0^2 = \frac{E}{\rho}.$$

Отметим, что

$$A_1 = 8A_2/(\gamma+1).$$

Функции  $W_1, \Phi_1$  возмущенного состояния, как обычно принято в задачах флаттера, будем искать в классе функций:

$$W_1 = W \exp(\Omega t), \quad \Phi_1 = \Phi \exp(\Omega t), \quad \Omega = \frac{l\omega}{a_0}.$$

Подставив это в (17), (18) получим:

$$\Delta^2 W - \frac{A_0}{x_0 + y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \left( A_2 \mu u H_2(x_0 + y) - \frac{B_0}{x_0 + y} \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} \right) \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} +$$

$$+ \left( A_1 \mu u H_1 - \frac{B_0}{x_0 + y} \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial y^2} \right) \frac{\partial W}{\partial y} + A_1 \mu u H_1 \Omega W + B_1 \Omega^2 W +$$

$$+ 2A_2 u H_2(x_0 + y) \Omega \frac{\partial W}{\partial y} = 0,$$

$$\Delta^2 \Phi + \frac{1}{(x_0 + y) \operatorname{tg} \alpha} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0. \quad (20)$$

Эта система должна быть дополнена однородными граничными условиями (9). Мы имеем, следовательно, задачу на собственные значения  $\Omega$ .

Представим систему (19), (20) в виде

$$L_1(W, \Phi) + \Omega L_0(W, \Phi) = 0; \quad L_2(W, \Phi) = 0. \quad (21)$$

Как видно, сформулированная нами математическая постановка задачи флаттера конической оболочки принципиально отличается от всех известных постановок; это составляет новизну постановки. Задача (21), (9) является несамосопряженной, поэтому собственные значения будут, вообще говоря, комплексными. По определению, колебания оболочки устойчивы, если  $\operatorname{Re} \Omega < 0$ , неустойчивы - если  $\operatorname{Re} \Omega > 0$ ; критические значения параметров соответствуют условию  $\operatorname{Re} \Omega = 0$ .

**Замечание.** Сделаем дополнительное разъяснение по поводу перехода от граничных условий (9) к граничным условиям (11). Представим себе, что края оболочки  $y=0$  и  $y=1$  опираются на упругие элементы, которые создают реактивные изгибающие моменты, пропорциональные углу поворота:

$$y=0, \quad M_r = \frac{\nu W'}{x_0}; \quad y=1, \quad M_r = \frac{\nu W'}{x_0+1}.$$

При такой трактовке условий «стесненного» (не свободного) шарнирного опирания, из (9) следует (11).

## **ЛИТЕРАТУРА**

1. Наджафов М.А. О флаттере конической оболочки. Известия Орелского ГТУ, серия «Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии», 2009, № 3-275 (561), с.10-14.
2. Григолоук Э.И., Кабанов В.В. Устойчивость оболочек. М.: Наука, 1978, 359 с.
3. Алгазин С.Д., Кийко И.А. Флаттер пластин и оболочек. М.: Наука, 2006, 247 с.
4. Наджафов М.А. Постановка задачи об упругих колебаниях и устойчивости (панельный флаттер) конической оболочки, обтекаемой потоком газа с большой сверхзвуковой скоростью // Докл. НАН Азерб., 2005, № 4, с. 43-48.

## **FLATTER MƏSƏLƏSİNİN RİYAZİ QOYULUŞU**

**M.A.NƏCƏFOV**

### **XÜLASƏ**

Baxılan işdə verilmiş sistem kiçik həyəcanlanmaya görə xəttləşdirilir və həyəcanlanmış sistemin həlli harmonik rəqs formasında axtarılır. Nəticədə panel flutter məsələsi iki öz-özünə qoşma olmayan operatorlar sisteminin məxsusi qiymətlərinin tapılmasına gətirilir.

## **THE MATHEMATICAL FORMULATION OF FLATTER PROBLEM**

**M.A.NAJAFOV**

### **SUMMARY**

The initial system has been linearized on small disturbances and the decision of the perturbed system is searched in the form of harmonious fluctuations in the paper. As a result, the problem of panel flutter is reduced to the problem of own values for the system of two self-conjugated operators.